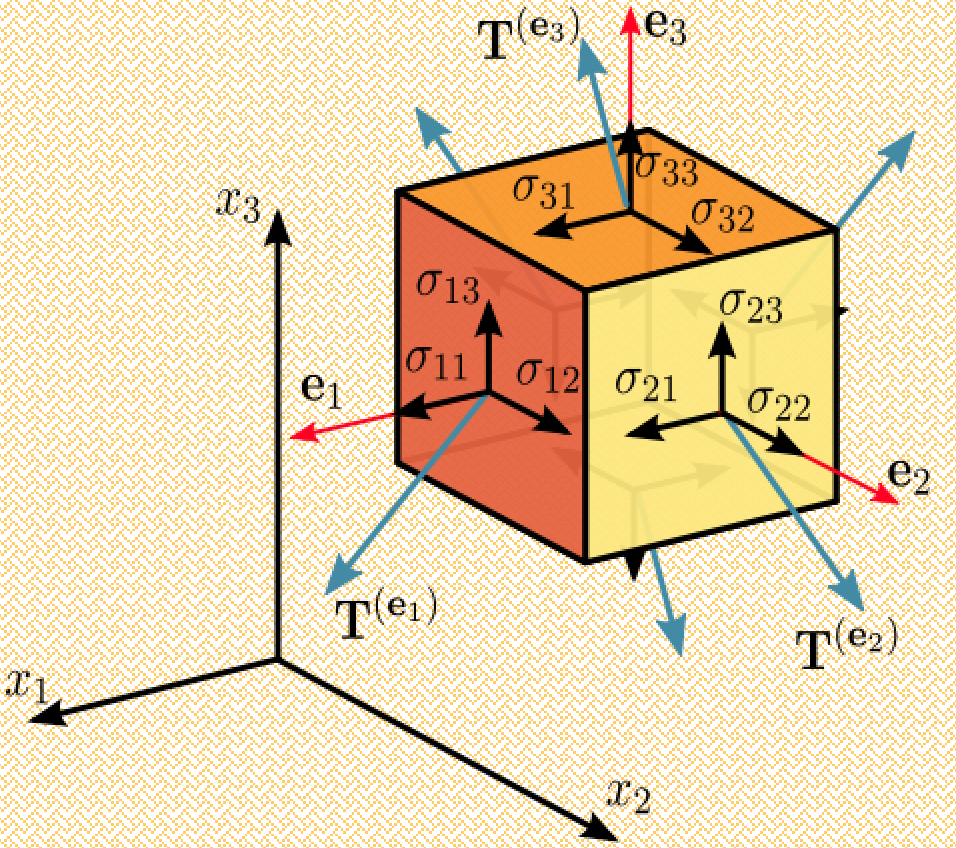
Домашнее задание 2-2

Задача (7 баллов)

Расчет тензора напряжений

Задан следующий тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & -50 & 20 \\ -50 & 150 & 70 \\ 20 & 70 & -30 \end{pmatrix} \text{МПа}$$



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Определение инвариантов напряженного состояния

Инвариантом называется величина, не зависящая от системы координат. В частности, напряженное состояние в любой точке является инвариантом, несмотря на то, что составляющие тензора в разных системах координат, т.е. напряжения, действующие по координатным площадкам, различны. Однако, имеются выражения, составленные из напряжений по координатным площадкам, которые остаются постоянными в любой системе координат. Эти выражения и называются инвариантами напряженного состояния в точке или инвариантами тензора напряжений.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \cdots \text{ МПа}$$
$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \cdots \text{ МПа}^2$$
$$I_3 = \det(T_\sigma) \text{ МПа}^3$$

(1)

Определение главных напряжений

Главными напряжениями называются нормальные напряжения, действующие по площадкам, где отсутствуют касательные напряжения. Координатные оси, являющиеся нормалями к таким площадкам, называются главными осями тензора напряжений, а сами площадки – главными площадками.

Главные напряжения определяются из кубичного уравнения:

$$s^3 - I_1 \cdot s^2 + I_2 \cdot s - I_3 = 0 \qquad (2)$$

Кубические уравнения общего вида могут иметь комплексные корни, уравнения для определения главных напряжений и главных деформаций всегда имеют три действительных корня.

Пусть задано кубическое уравнения:

$$x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \qquad (3)$$

После подстановки

$$x = y - b/3 \qquad (4)$$

получаем приведенное кубичное уравнение:

$$y^3 + p \cdot y + q = 0 \qquad (5)$$

Здесь p и q вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p &= (3c - b^2)/3 \\ q &= 2b^3/27 - bc/3 + d \end{aligned} \qquad (6)$$

Формулы Кардано для случая уравнения с тремя действительными корнями имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{-p^3/27} \\ \cos\varphi &= -q/2\rho \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi/3) \\ y_2 &= 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi/3 + 2 \cdot \pi) \\ y_3 &= 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi/3 + 4\pi) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Далее с помощью подстановки (4) в (3) находим корни исходного уравнения. Решаем наше уравнение (2):

$$s^3 - I_1 \cdot s^2 + I_2 \cdot s - I_3 = 0 \qquad (9)$$

Подстановка (4) с новыми обозначениями имеет вид:

$$s = \sigma + I_1/3 \qquad (10)$$

Здесь изменен знак второго слагаемого подстановки потому, что $b = -I_1$.

Подставляя (10) в (9) получим уравнение аналогичное (5):

$$\sigma^3 + p \cdot \sigma + q = 0 \qquad (11)$$

Здесь коэффициенты p и q вычисляются по формулам (6):

$$p = \frac{3 \cdot I_2 - I_1^2}{3} = \ldots МПа^2$$

$$q = \frac{-2I_1^3}{27} + \frac{I_1 \cdot I_2}{3} - I_3 = \ldots МПа^3$$

И заметьте, везде записаны единицы измерения со своими степенями, которые также участвуют в математических операциях вместе со значениями величин!

Далее по формулам (7) находим:

$$\rho = \sqrt{-p^3 / 27} = \ldots МПа^3$$

$$\cos\varphi = -q / 2\rho = \ldots \Rightarrow \varphi = \ldots рад$$

По формулам (8) находим корни уравнения (5):

$$\sigma' = 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi / 3) = \ldots МПа.$$

$$\sigma'' = 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi / 3 + 2\pi / 3) = \ldots МПа$$

$$\sigma''' = 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\varphi / 3 + 4\pi / 3) = \ldots МПа$$

Учитывая (10), находим корни исходного уравнения (9), являющимися главными напряжениями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma' + \frac{I_1}{3} = \ldots МПа \\ \sigma_2 &= \sigma'' + \frac{I_1}{3} = \ldots МПа \\ \sigma_3 &= \sigma''' + \frac{I_1}{3} = \ldots МПа \end{aligned} \qquad (12)$$

В соответствии с правилом индексации главных напряжений введены обозначения: $\boldsymbol{\sigma_1}$ - алгебраически максимальное напряжение; $\boldsymbol{\sigma_2}$ - алгебраически среднее напряжение; $\boldsymbol{\sigma_3}$ - алгебраически минимальное напряжение.

Тензор напряжений в главных осях имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \ldots МПа$$